Macroeconomia II - Gabarito da Lista IV

Professor: Fernando Barros Jr
Monitor: Marcos Ribeiro

1. (a)

$$F(\lambda K, \lambda N) = (\lambda K)^{\alpha}(\lambda N)^{1-\alpha}$$
$$\lambda F(K, N) = \lambda^1 K^{\alpha} N^{1-\alpha}.$$

Como indicado pelo expoente de λ, a função Cobb-Douglas é homogênea de grau 1.

(b) Se $\alpha/(1-\alpha) > 1$ a tecnologia de produção é mais intesiva em capital.

(c) O produto médio do trabalho é dado por:

$$A_N = \frac{K^{\alpha} N^{1-\alpha}}{N} = K^{\alpha} N^{-\alpha}.$$

O produto médio do capital é dado por:

$$A_K = \frac{K^{\alpha} N^{1-\alpha}}{K} = K^{\alpha-1} N^{1-\alpha}.$$

(d) O produto marginal do trabalho e do capital são dados por:

$$F_K = \alpha K^{\alpha-1} N^{1-\alpha} > 0,$$
$$F_N = (1-\alpha) K^{\alpha} N^{-\alpha} > 0.$$

O fato de ambos serem maiores que zero significa que maiores níveis de capital e trabalho aumentam o produto.

(e) As derivadas do produto marginal do trabalho e do capital são dados por:

$$F_{KK} = (\alpha - 1)\alpha K^{\alpha-2} N^{1-\alpha} < 0,$$
$$F_{NN} = -\alpha(1-\alpha) K^{\alpha} N^{-\alpha-1} < 0.$$

O fato de o produto marginal do trabalho e do capital serem maiores que zero e suas derivadas serem menores que zero significa que maiores níveis de capital e trabalho aumentam o produto a taxas decrescentes.

(f) O Teorema de Young garante que as derivadas cruzadas sejam iguais, portanto:

$$F_{NK} = F_{KN} = \alpha(1-\alpha) K^{\alpha-1} N^{-\alpha}.$$

(g) A elasticidade do produto com relação ao trabalho é dada por:

$$E_N = F_N \times N/F(K, N) = 1 - \alpha$$

(h) A elasticidade do produto com relação ao capital é dada por:

$$E_K = F_K \times K/F(K, N) = \alpha$$

(i) A TMST mede o grau de substitutibilidade entre os fatores de produção que mantém o produto constante.

(j) As TMSTs entre trabalho e capital e entre capital e trabalho são dadas por:

$$TMST_{N,K} = \frac{F_K}{F_N} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{K}{N}$$

$$TMST_{K,N} = \frac{F_N}{F_K} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{N}{K}$$

(k) A elasticidade de substituição mede a variação percentual na razão dos dois insumos em relação a variação percentual de seus preços. Note que, em microeconomia:

$$F_N = w, \text{ Produto marginal do trabalho é igual ao salário.}$$

$$F_K = r, \text{ Produto marginal do capital é igual a remuneração do capital.}$$

Se dividirmos w por r temos:

$$\frac{w}{r} = \frac{F_K}{F_N} = TMST_{N,K} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{K}{N}.$$

Podemos reescrever isso em função de K/N como

$$\frac{K}{N} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{w}{r}. \tag{1}$$

Se derivarmos K/N em relação a w/r temos

$$\frac{\partial\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial\left(\frac{w}{r}\right)} = \frac{\alpha}{1-\alpha}. \tag{2}$$

Também podemos reescrever a Equação (1) como

$$\frac{\frac{w}{r}}{\frac{K}{N}} = \frac{1-\alpha}{\alpha}. \tag{3}$$

Utilizando a definição de elasticidade de substituição, podemos escrevê-la como

$$\sigma = \frac{\partial \ln\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial \ln\left(\frac{w}{r}\right)}. \tag{4}$$

A Equação (4) pode ser reescrita como[1]

$$\sigma = \frac{\partial\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial\left(\frac{w}{r}\right)}\frac{\frac{w}{r}}{\frac{K}{N}}. \tag{5}$$

[1]Note que aqui estamos utilizando a derivada do logaritmo.

Por fim, podemos substituir as Equações (2) e (3) em (5) para obter

$$\sigma = 1.$$

2. (a) D_t é o lucro da firma representativa que é convertido integralmente em dividendos e é dado por:

$$D_t = Y_t - w_t N_t,$$

Sendo que Y_t é o produto multiplicado pelo preço, que normalizamos para um, w_t é o salário e N_t é a quantidade de trabalho. Já D_{t+1} é dado por:

$$D_{t+1} = Y_{t+1} + (1-\delta)K_{t+1} - w_{t+1}N_{t+1} - (1+r_t)B_t^I$$

Sendo que Y_{t+1} é o produto multiplicado pelo preço, que normalizamos para um, $(1-\delta)K_{t+1}$ é o capital que não foi investido descontado da depreciação δ, w_{t+1} é o salário, N_{t+1} é a quantidade de trabalho, e $(1+r_t)B_t^I$ é o pagamento do empréstimo tomado para fazer o investimento a uma taxa r_t.

(b) O problema do consumidor por ser escrito como:

$$\max_{N_t, I_t} \quad v_t = Y_t - w_t N_t + \frac{1}{1+r_t}\left[Y_{t+1} + (1-\delta)K_{t+1} - w_{t+1}N_{t+1} - (1+r_t)B_t^I\right]$$

$$\text{st:} \quad K_{t+1} = I_t + (1+\delta)K_t$$
$$I_t = B_t^I.$$

(c) Ao combinarmos ambas as restrições e reescrever em função de B_t^I encontramos

$$B_t^I = K_{t+1} - (1-\delta)K_t,$$

Logo, podemos reescrever o problema do consumidor de forma irrestrita como

$$\max_{N_t, I_t} \quad v_t = Y_t - w_t N_t + \frac{1}{1+r_t}\left[Y_{t+1} + (1-\delta)K_{t+1} - w_{t+1}N_{t+1} - (1+r_t)(K_{t+1} - (1-\delta)K_t)\right].$$

Para encontrar os valores de N_t e K_{t+1} que maximizam v_t, derivamos v_t em relação a cada um deles e igualamos a zero. Temos então que

$$\frac{\partial v_t}{\partial N_t} = \frac{\partial Y_t}{\partial N_t} - w_t$$
$$w_t = \frac{\partial Y_t}{\partial N_t}$$

Isso indica que o salário é igual ao produto marginal do trabalho. Sabemos que

$$Y_t = F(A_t, K_t, N_t) = A_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

e que

$$\frac{\partial Y_t}{\partial N_t} = (1-\alpha)A_t K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha},$$

logo,

$$w_t = (1-\alpha)A_t K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha},$$

é a equação que define a demanda por trabalho.

(d) Para K_{t+1} temos que

$$\frac{\partial v_t}{\partial K_{t+1}} = \frac{1}{1+r_t}\left[\frac{\partial Y_{t+1}}{\partial K_{t+1}} + (1-\delta) - (1+r_t)\right]$$

$$(1+r_t) = \frac{\partial Y_{t+1}}{\partial K_{t+1}} + (1-\delta),$$

Sabemos que

$$\frac{\partial Y_{t+1}}{\partial K_{t+1}} = \alpha A_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha},$$

logo,

$$r_t + \delta = \alpha A_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha},$$

é a equação que define a demanda por capital.

3. (a) Podemos reescrever o problema de forma irrestrita como

$$\max_{C_t, N_t} \quad U = \ln w_t + \ln N_t + \theta_t \ln(1-N_t),$$

e derivar em relação a N_t para obter

$$\frac{\partial U}{\partial N_t} = \frac{1}{N_t} - \frac{\theta_t}{1-N_t} = 0,$$

que podemos reescrever em função de N_t para obter

$$N_t = \frac{1}{1+\theta_t}.$$

Ao substituirmos N_t na restrição encontramos

$$C_t = \frac{w_t}{1+\theta_t}.$$

(b) w_t não exerce nenhum efeito sobre N_t, uma vez que, a utilidade do consumidor é aditivamente separável. Isso implica que o nível de trabalho não influencia a utilidade marginal do consumo.

(c) Utilize a função de utilidade dada e refaça os itens anteriores.