Macroeconomia II - Gabarito da Lista 2

Professor: Fernando Barros Jr
Monitor: Marcos Ribeiro

1. Considere o seguinte problema do consumidor:

$$\max_{c_1, c_2, s_1} u(c_1) + \beta u(c_2)$$

sujeito a

$$c_1 + s_1 \leq y_1$$
$$c_2 \leq y_2 + (1+r)s_1$$

Considere que o consumidor é um tomador de preços e a seguinte função de utilidade:

$$u(c) = ac + \frac{b}{2}c^2, \quad \text{onde } a > 0 \text{ e } b > 0,$$

(a) Podemos escrever s_1 como $s_1 = y_1 - c_1$ e substituir em c_2 para encontrar o valor presente do consumo e da renda.

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r} \tag{1}$$

(b) O Lagrangeano será dado por:

$$\mathscr{L} = u(c_1) + \beta u(c_2) - \lambda \left[c_1 + \frac{c_2}{1+r} - y_1 - \frac{y_2}{1+r} \right] \tag{2}$$

(c) Primeiro vamos derivar a Equação 2 em relação a c_1 e a c_2 e igualar a zero.

$$u'(c_1) = \lambda$$
$$\beta(1+r)u'(c_2) = \lambda$$

Igualamos os λ's e rearranjamos para obter a Equação de Euler:

$$\frac{u'(c_2)}{u'(c_1)} = \frac{1}{\beta(1+r)} \tag{3}$$

(d) Da forma funcional que definimos temos que $u'(c) = a + bc$. Logo, podemos reescrever a Equação de Euler como:

$$\frac{a + bc_2}{a + bc_1} = \frac{1}{\beta(1+r)}$$

E rearranjar para obter c_1:

$$c_1 = \frac{a}{b}\left(\beta(1+r) - 1\right) + \beta(1+r)c_2$$

Então, podemos substituir essa expressão na ROI.

$$\frac{a}{b}\left(\beta(1+r)-1\right)+\beta(1+r)c_2+\frac{c_2}{1+r}=y_1+\frac{y_2}{1+r}$$

E rearranjar para obter c_2:

$$c_2=\left[\frac{1+r}{\beta(1+r)^2+1}\right]\left[y_1+\frac{y_2}{1+r}-\frac{a}{b}\left(\beta(1+r)-1\right)\right] \tag{4}$$

Por fim, substituímos c_2 na Equação de c_1 e rearranjamos os termos para encontrar c_1.

$$c_1=\left[1-\frac{\beta(1+r)}{\beta(1+r)^2+1}\right]\left[\frac{a}{b}(\beta(1+r)-1)\right]+\left[\frac{\beta(1+r)}{\beta(1+r)^2+1}\right]\left[y_1+\frac{y_2}{1+r}\right] \tag{5}$$

(e) Vamos analisar pela ótica do consumo para tentar entender como o juros afeta a poupança, uma vez que, $s=y-c$. Intuitivamente, o efeito de um aumento da taxa juros no consumo é ambíguo a princípio. Um aumento na taxa de juros tem dois efeitos, efeito renda e efeito substituição. Primeiro, um aumento no juros reduz o valor presente descontado da renda no período 2 e causa uma queda de consumo em ambos os períodos. Esse é o efeito renda. Segundo, um aumento no juros faz com que fique caro consumir no período 1, logo o consumidor opta por poupar mais, que por sua vez, resulta em queda do consumo no período 1 em favor do período 2. Esse é o efeito substituição. Ao derivarmos c_2 em relação a r não fica claro se a derivada é positiva ou negativa[1].

$$\frac{\partial c_2}{\partial r}=\frac{-a\beta^2(1+r)^2-2a\beta(1+r)+a+b(y_1-\beta y_2)}{b(\beta r+\beta+1)^2}$$

Note que não é simples entender algebricamente como a taxa de juros afeta o consumo, o mesmo vale para a poupança.

(f) O efeito marginal de um aumento transitório na renda é dado por $\partial c_i/\partial y_1$, sendo que $i\in(1,2)$. Temos então:

$$\frac{\partial c_1}{\partial y_1}=\left[\frac{\beta(1+r)}{\beta(1+r)^2+1}\right]$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial y_1}=\left[\frac{(1+r)}{\beta(1+r)^2+1}\right]$$

(g) O efeito marginal de um aumento permanente na renda é dado por $\partial c_i/\partial y_1+\partial c_i/\partial y_2$, sendo que $i\in(1,2)$. Temos então:

$$\frac{\partial c_1}{\partial y_1}+\frac{\partial c_1}{\partial y_2}=\frac{\beta(2+r)}{\beta(1+r)^2+1}$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial y_1}+\frac{\partial c_2}{\partial y_2}=\frac{(2+r)}{\beta(1+r)^2+1}$$

(h) Nesse item basta utilizar a forma funcional logarítmica na Equação 3 e refazer os cálculos, que certamente são muito mais simples do que com a forma funcional quadrática.

[1] Derivadas muito trabalhosas podem ser feitas utilizando-se o Wolfram Alpha.

2. Essa questão é bastante semelhante a anterior. No entanto, aqui introduzimos no modelo os ativos (a).

Temos no exercício que:

$$a_{t+1} = (1+r)(a_t + y_t - c_t) \tag{6}$$
$$a_{t+2} = (1+r)(a_{t+1} + y_{t+1} - c_{t+1}) \tag{7}$$

(a) Sabemos que $a_{t+2} = 0$ e vamos utilizar isso para calcular a restrição orçamentária intertemporal. Logo:

$$(1+r)(a_{t+1} + y_{t+1} - c_{t+1}) = 0$$
$$a_{t+1} = c_{t+1} - y_{t+1}$$

Podemos substituir essa última expressão na Equação 6 e rearranjar os termos para obter a restrição orçamentária intertemporal.

$$c_t + \frac{c_{t+1}}{1+r} = a_t + y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r} \tag{8}$$

(b) O Lagrangeano será dado por:

$$\mathscr{L} = u(c_t) + \beta u(c_{t+1}) + \lambda \left[a_t + y_1 + \frac{y_{t+1}}{1+r} - c_1 - \frac{c_{t+1}}{1+r} \right] \tag{9}$$

(c) Primeiro vamos derivar a Equação 9 em relação a c_t e a c_{t+1} e igualar a zero.

$$u'(c_t) = \lambda$$
$$\beta(1+r)u'(c_{t+1}) = \lambda$$

Igualamos os λ's e rearranjamos para obter a Equação de Euler:

$$\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = \frac{1}{\beta(1+r)} \tag{10}$$

(d) Sabemos que a derivada de $u(c) = \ln(c)$ é $u'(c) = 1/c$. Então, vamos usar isso na Equação 10. Temos então:

$$\frac{c_t}{c_{t+1}} = \frac{1}{\beta(1+r)}$$
$$c_t = \frac{c_{t+1}}{\beta(1+r)} \tag{11}$$

Podemos substituir essa última expressão na restrição orçamentária intertemporal, rearranjar e encontrar c_{t+1}.

$$\frac{c_{t+1}}{\beta(1+r)} + \frac{c_{t+1}}{1+r} = a_t + y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r}$$
$$c_{t+1} \left[\frac{1+\beta}{\beta(1+r)} \right] = a_t + y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r}$$
$$c_{t+1} = \left[\frac{\beta(1+r)}{1+\beta} \right] (a_t + y_t) + \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right) y_{t+1} \tag{12}$$

Para encontrar c_t basta substituir c_{t+1} na Equação 11.

$$c_t = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)(a_t + y_t) + \left[\frac{\beta}{\beta(1+r)(1+\beta)}\right] y_{t+1} \tag{13}$$

(e) Vamos derivar c_t em relação a a_t.

$$\frac{\partial c_t}{\partial a_t} = \left(\frac{1}{1+\beta}\right) > 0$$

Dado a nossa função de utilidade, um aumento na riqueza (a_t) desloca a restrição orçamentária intertemporal para cima e para a direita e aumenta c_t.

(f) Neste item basta utilizar a nova forma funcional na Equação 10 e refazer os cálculos.

3. Ver a resolução na minha página.